

<https://doi.org/10.51574/kognitif.v4i4.2235>

Analisis Kesulitan Mahasiswa Calon Guru Matematika dalam Pembuktian Teorema

Ika Victoria Nalurita, Roisatun Nisa', Melinda Dwi Jayanti

How to cite : Nalurita, I., Nisa', R., & Jayanti, M. D. . (2024). Analisis Kesulitan Mahasiswa Calon Guru Matematika dalam Pembuktian Teorema. *Kognitif: Jurnal Riset HOTS Pendidikan Matematika*, 4(4), 1812–1823. <https://doi.org/10.51574/kognitif.v4i4.2235>

To link to this article : <https://doi.org/10.51574/kognitif.v4i4.2235>



Opened Access Article



Published Online on 30 December 2024



Submit your paper to this journal



Analisis Kesulitan Mahasiswa Calon Guru Matematika dalam Pembuktian Teorema

Ika Victoria Nalurita^{1*}, Roisatun Nisa², Melinda Dwi Jayanti³

^{1,2,3}Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan, Universitas Qomaruddin

Article Info

Article history:

Received Nov 05, 2024

Accepted Des 13, 2024

Published Online Dec 30, 2024

Keywords:

E-modul

Anyflip

Kemampuan

Matematis

Flipbook

Penalaran

ABSTRAK

Dalam matematika, teorema perlu dibuktikan kebenarannya. Melalui proses pembuktian, mahasiswa dapat mengetahui kebenaran suatu teorema dan juga dapat mengasah kemampuan berpikir logis mahasiswa. Namun, hasil studi pendahuluan menunjukkan bahwa sebagian besar mahasiswa calon guru matematika mengalami kesulitan dalam pembuktian. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis kesulitan mahasiswa calon guru matematika dalam pembuktian teorema. Kami menggunakan pendekatan penelitian deskriptif kualitatif dengan melibatkan mahasiswa semester II prodi Pendidikan Matematika Universitas Qomaruddin yang dipilih berdasarkan kemampuan awal matematikanya. Kami menggunakan soal tes dan pedoman wawancara untuk mengumpulkan data. Subjek yang terpilih diberikan soal pembuktian teorema dan dilakukan wawancara untuk memperjelas hasil jawaban pada saat tes tersebut. Data yang terkumpul dianalisis dengan kerangka kerja analisis Miles & Huberman, yang mencakup reduksi data, penyajian data, dan penarikan simpulan. Hasil penelitian menunjukkan bahwa: (1) kesulitan subjek berkemampuan tinggi adalah ketidakmampuan dalam menarik kesimpulan pembuktian teorema (2) kesulitan subjek berkemampuan sedang adalah ketidakmampuan mengingat beberapa konsep, dan kurang mampu menggunakan data serta mengaitkan pernyataan pernyataan dalam pembuktian; dan (3) kesulitan subjek berkemampuan rendah adalah ketidakmampuan mengingat konsep pembuktian, ketidakmampuan mengenali simbol-simbol geometri matematika, dan ketidakmampuan dalam menarik kesimpulan.



This is an open access under the CC-BY-SA licence



Corresponding Author:

Ika Victoria Nalurita,

Program Studi Pendidikan Matematika,

Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan,

Universitas Qomaruddin

Jl. Raya Bungah No. 01 Bungah Gresik 61152

Email: ika.victori4@gmail.com

Pendahuluan

Pembuktian matematika merupakan sebuah demonstrasi yang meyakinkan atas rumus, teorema itu benar, dengan bantuan logika dan matematika (Ellis et al., 2017; Kontorovich,

2021; Nolte & Pamperien, 2017). Pembuatan bukti telah lama mendapatkan perhatian besar dalam matematika teoritis (Fredriksdotter et al., 2022; Komatsu & Jones, 2022). Pembuktian terbagi menjadi dua yaitu pembuktian langsung dan tidak langsung (Bieda, 2010). Melalui tugas pembuktian, dosen dapat melihat: (1) bagaimana kemampuan mahasiswa dalam berargumentasi secara logis, (2) bagaimana mahasiswa menggunakan contoh dan lawan contoh untuk mendukung argumentasinya, (3) kelemahan-kelemahan apa saja yang dialami mahasiswa dalam bernalar, dan (4) miskonsepsi apa yang sering dialami mahasiswa.

Pembuktian ini banyak dilakukan pada mata kuliah Geometri (Clements et al., 2011; Kholid et al., 2022). Geometri merupakan system matematika yang menggunakan penalaran deduktif, berdasarkan fakta yang dikenal dan dapat diterima untuk menemukan sifat-sifat baru (Nursyahidah et al., 2021). Sebagai system deduktif, kebenaran suatu pernyataan dalam geometri dibuktikan berdasarkan logika. Teorema adalah suatu pernyataan yang harus dibuktikan kebenarannya (Fiallo & Gutiérrez, 2017; García-García & Dolores-Flores, 2018). Pernyataan dalam teorema biasanya berupa implikasi maupun biimplikasi. Oleh sebab itu, pembuktian teorema berarti pembuktian kebenaran suatu kalimat matematika. Pernyataan teorema dapat dibedakan ke dalam dua bagian, yaitu hipotesis yang menunjukkan apa yang diketahui dan Kesimpulan yang menunjukkan apa yang dibuktikan (Fiallo & Gutiérrez, 2017)

Pembuktian dalam geometri sangat perlu untuk dikembangkan bagi calon guru matematika. Hal ini berkaitan dengan tujuan pembelajaran geometri pada sekolah menengah, NCTM menyatakan “*establish the validity of geometric conjectures using deduction, prove theorems, and critique arguments made by others*” (Appova & Taylor, 2019). Tujuan dari pembelajaran geometri pada sekolah menengah adalah siswa mampu menentukan validitas pernyataan menggunakan deduksi, pembuktian teorema dan berargumentasi secara kritis. Tujuan ini hanya akan tercapai hanya jika calon guru matematika menguasai pembuktian dalam geometri. Kenyataannya pembuktian teorema geometri merupakan suatu hal yang menakutkan bagi banyak mahasiswa calon guru matematika (Cervello Rogers & Steele, 2016; Nachlieli et al., 2009). Berdasarkan pengalaman mengajar mata kuliah geometri, ketika masalah berupa pembuktian teorema geometri diberikan, berbagai macam respon negatif yang ditunjukkan oleh mahasiswa, diantaranya (1) sebagian besar mahasiswa hanya menulis ulang soal yang diberikan dan tidak dikerjakan oleh mahasiswa, (2) beberapa mahasiswa mengerjakan tetapi lebih sering diloncati (dikerjakan pada waktu paling akhir), dan (3) mahasiswa mengerjakan tetapi pembuktian yang dilakukan berputar-putar sehingga tidak sampai pada kesimpulan.

Hal ini didukung pula dengan hasil observasi yang menunjukkan bahwa kemampuan mahasiswa dalam pembuktian menunjukkan perbedaan yang sangat mencolok dari hasil pemecahan masalah geometri. Sebagian besar mahasiswa tidak mampu melakukan proses pemecahan masalah terutama masalah pembuktian teorema geometri (Nachlieli et al., 2009). Salah satu kesulitan yang dialami siswa adalah kesulitan dalam pembuktian suatu pernyataan secara langsung (Yang, 2012). Berdasarkan observasi proses pembelajaran, tidak jarang ditemukan kesalahan-kesalahan yang dilakukan oleh mahasiswa dalam menyelesaikan soal-soal yang berkaitan dengan pembuktian teorema. Hal ini disebabkan oleh beberapa faktor, diantaranya mahasiswa tidak memahami maksud soal dengan baik. Siswa belum dapat mengoptimalkan semua kemampuan, terutama pembuktian matematika dalam mengerjakan teori bilangan yang cenderung menyerah dalam mengerjakan soal ketika mengalami kesulitan. Kesulitan siswa dalam menyelesaikan soal matematika disebabkan oleh kecenderungan siswa yang tidak mampu menginterpretasikan maksud dari soal, kurangnya kemampuan siswa dalam mentransformasikan kalimat ke dalam model matematika, dan kurangnya pemahaman konsep yang diharapkan sehingga siswa sulit menentukan rumus yang digunakan (Sindy Mustika Sari, Aldi Firmansyah and Reza Lestari, 2022). Terdapat 3 jenis kesulitan siswa dalam menyelesaikan soal, yaitu : (1) kesulitan dalam mempelajari konsep; (2) kesulitan dalam

menerapkan; dan (3) kesulitan dalam menyelesaikan masalah verbal (Sholehah, Anggreini and Waluyo, 2017). Tabel 1 menunjukkan penjelasan untuk tiap indikator kesulitan.

Tabel 1. Indikator Kesulitan Siswa Dalam Menyelesaikan Soal

No	Indikator	Terjemahan
1	Kesulitan dalam mempelajari konsep	Siswa sulit dalam mempelajari konsep matematika dalam menyelesaikan soal
2	Kesulitan dalam menerapkan prinsip	Siswa sulit dalam menerapkan prinsip yang telah didapatkan dan sulit dalam menerapkannya dalam menyelesaikan soal
3	Kesulitan dalam menyelesaikan masalah verbal	Siswa sulit dalam menyelesaikan soal-soal yang verbal atau soal –soal cerita

Selain itu, indikator kesulitan menyelesaikan soal terdiri dari ketidakmampuan siswa dalam penguasaan konsep secara benar, ketidakmampuan menggunakan data, ketidakmampuan mengartikan bahasa matematika, ketidakcermatan dalam melakukan operasi hitung, dan ketidakmampuan dalam menarik kesimpulan. Dari paparan diatas, tampak bahwa masalah yang muncul adalah kesulitan mahasiswa calon guru dalam membuktikan teorema. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis kesulitan calon guru matematika dalam pembuktian teorema geometri. Kemudian, hasil dari penelitian akan digunakan sebagai pendahuluan dalam pengembangan bahan ajar mata kuliah geometri

Metode

Jenis dan Subjek

Pada penelitian ini, jenis penelitian yang digunakan adalah penelitian kualitatif dengan metode deskriptif. Peneliti menggunakan jenis penelitian ini dan mengumpulkan data melalui tes dan wawancara dengan tujuan untuk mendeskripsikan hasil analisis kesulitan mahasiswa calon guru matematika Universitas Qomaruddin Gresik dalam pembuktian Teorema Geometri ditinjau dari kemampuan awal matematika. Subjek penelitian ini adalah mahasiswa semester 2 Prodi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Qomaruddin tahun 2023/2024. Pemilihan subjek berdasarkan kemampuan awal matematika dengan pemberian soal tes sehingga dari 1 kelas PMT terpilih 3 subjek yaitu subjek kemampuan matematika tinggi, kemampuan matematika sedang dan kemampuan matematika rendah. Hal ini dilakukan agar dapat mengetahui kesulitan yang dialami mahasiswa dalam menyelesaikan soal pembuktian teorema. Adapun kriteria kemampuan matematika mahasiswa dikategorikan berdasarkan rumus dari Arikunto (2013) ditunjukkan pada Tabel 2

Tabel 2. Kategori Kemampuan Mahasiswa

Kriteria	Kategori
$x \geq \bar{x} + SD$	Tinggi
$(\bar{x} - SD) < x < (\bar{x} + SD)$	Sedang
$x \leq \bar{x} - SD$	Rendah

Instrumen

Dalam penelitian ini diperlukan instrument berupa soal tes, lembar observasi dan pedoman wawancara. *Pertama*, terdapat dua soal Tes yaitu TKM dan SPT. Untuk TKM berupa soal pilihan ganda materi sekolah menengah atas sebanyak 30 soal. Soal TKM ini akan diadopsi dari soal ujian akhir sekolah Tingkat SMA. Untuk SPT ini berupa 1 soal uraian pembuktian

Teorema pada mata kuliah Geometri khususnya pada bab Kesejajaran. SPT ini sudah tergolong pada soal C5 karena mahasiswa dituntut untuk mengevaluasi suatu pernyataan sehingga termasuk kategori soal *Higher Order Thinking*. *Kedua*, lembar observasi yang digunakan berisi aspek-aspek yang perlu diamati dan dilengkapi dengan catatan tambahan. *Ketiga*, pedoman wawancara ini dijadikan sebagai panduan dalam melaksanakan wawancara berdasarkan indikator kesulitan yang telah ditentukan.

Prosedur/Pengumpulan Data

Teknik pengumpulan data yang digunakan dalam penelitian ini adalah tes, observasi dan wawancara. Penelitian ini membutuhkan tes soal tertulis untuk pemilihan subjek dan untuk mengetahui bagaimana proses mahasiswa membuktikan sebuah teorema. Tes awal berupa Tes Kemampuan Matematika (TKM) dan tes Soal Pembuktian Teorema (SPT). Selanjutnya observasi dilakukan pada saat subjek mengerjakan SPT sehingga peneliti dapat menganalisis respon yang diberikan maupun sikap yang ditunjukkan mahasiswa. Kemudian wawancara dilakukan untuk mengumpulkan informasi yang belum diperoleh dari informan melalui hasil tes.

Analisis Data

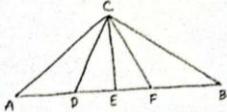
Setelah informasi yang diperoleh dari berbagai teknik pengumpulan data terkumpul, maka langkah selanjutnya adalah menganalisis data. *Pertama*, tahap reduksi data, peneliti melakukan pengkategorian serta membuang kata-kata yang berlebihan dan meringkas data dari hasil tes dan wawancara sesuai kebutuhan sehingga dapat disajikan dengan sesuai. Reduksi data digunakan untuk menghindari penumpukan informasi dari informan supaya hasil yang didapatkan berfokus pada tujuan penelitian. *Kedua*, tahap penyajian data, peneliti menyusun beberapa informasi yang telah diolah dari hasil reduksi, menyajikannya secara jelas dan sistematis sehingga dapat mempermudah peneliti dalam penarikan kesimpulan. Data yang diperoleh akan disajikan dalam bentuk kalimat naratif dengan tepat. *Ketiga*, tahap penarikan kesimpulan merupakan tahap akhir dari analisis data. Pada tahap ini, peneliti akan mengambil inti hasil sajian data yang telah diperoleh dan disusun menggunakan kalimat yang singkat, padat, dan jelas. Kesimpulan ini akan menggambarkan keseluruhan dari hasil penelitian yang telah didapatkan.

Hasil Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui kesulitan mahasiswa calon guru dalam membuktikan teorema geometri ditinjau dari kemampuan awal matematika tinggi, sedang, dan rendah. Pemilihan subjek penelitian dilakukan berdasarkan tes kemampuan matematika dan skor yang diperoleh dimasukkan ke dalam pengkategorian kemampuan milik Arikunto, sehingga didapatkan 1 mahasiswa berkemampuan matematika tinggi (ZL), 1 mahasiswa berkemampuan matematika sedang (NA) dan 1 mahasiswa berkemampuan matematika rendah (AH). Selanjutnya subjek berkemampuan matematika tinggi disebut ST, subjek berkemampuan matematika sedang disebut SS dan subjek berkemampuan matematika rendah disebut SR.

Data Penelitian Subjek Kemampuan Tinggi (ST)

1). Diketahui : $\overline{CE} \perp \overline{AB}$, $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, $\angle ACD \cong \angle BCF$
 Buktikan : $\triangle DEC \cong \triangle FEC$!



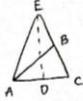
NO	Pernyataan	Alasan
1.	$\overline{CE} \perp \overline{AB}$	diketahui
2.	$m\angle AEC \cong m\angle CEB$	Akibat langkah 1
3.	$\overline{CE} \cong \overline{CE}$	refleksi
4.	$\triangle AEC \cong \triangle CEB$	diketahui
5.	$\angle ACD \cong \angle BCF$	diketahui
6.	$\angle DCE \cong \angle ECF$	Akibat langkah 4
7.	$\triangle DEC \cong \triangle FEC$	langkah 6, 3, 2 dan postulat sd - s - sd

(terbukti !)

Gambar 1. Jawaban Tes SPT 1 ST

Berdasarkan hasil tes pertama diatas tampak bahwa ST menyelesaikan pembuktian sampai akhir dengan Kesimpulan terbukti. Dari hasil wawancara, ST memahami dan menguasai konsep kekongruenan segitiga dengan benar. Pada gambar diatas juga tampak ST menuliskan apa yang diketahui dari soal serta menggambarkan ulang segitiga yang ada pada soal. ST dapat menggunakan data tersebut ke dalam tabel pembuktiannya secara tepat. ST juga dapat mengartikan dengan benar simbol geometri yang ada pada soal seperti garis, tegak lurus dan kekongruenan yang terungkap saat sesi wawancara. Setiap pernyataan pendukung pembuktian yang dicantumkan ST sudah memiliki alasan pernyataan yang benar namun ada satu pernyataan dengan alasan yang kurang tepat sehingga ST tidak dapat menarik Kesimpulan dengan benar.

2). Diketahui : B titik tengah \overline{EC} , D titik tengah \overline{AC} ,
 \overline{ED} garis bagi $\angle AEC$, \overline{AB} garis bagi $\angle EAC$.
 Buktikan : $\triangle ACE$ sama kaki !



NO	Pernyataan	Alasan
1.	B titik tengah \overline{EC}	diketahui
2.	$\overline{EB} \cong \overline{BC}$,	Akibat langkah 1
3.	\overline{AB} garis bagi $\angle EAC$	diketahui
4.	$\angle EAB \cong \angle CAB$	akibat langkah 3
5.	$\triangle ABE = \triangle ABC$	akibat langkah 3
6.	$m\angle ABE \cong m\angle ABC$	akibat langkah 1
7.	$\overline{AE} = \overline{AC}$	akibat langkah 5
8.	\overline{ED} garis bagi $\angle AEC$	diketahui
9.	D titik tengah AC	diketahui
10.	$\triangle AED = \triangle EDC$	langkah 8 & 9
11.	$\overline{AE} = \overline{EC}$	akibat langkah 10
12.	$\overline{AE} = \overline{AC} = \overline{EC}$	langkah 7 & 11

(tidak terbukti)

↳ $\triangle ACE$ adalah sama sisi.

Gambar 2. Jawaban Tes SPT 2 ST

Berdasarkan hasil tes kedua diatas tampak bahwa ST menyelesaikan pembuktian sampai akhir meski kesimpulannya tidak terbukti. ST juga dapat memahami dan menguasai konsep segitiga sama kaki dengan benar yang didukung dari hasil wawancara ST. Pada gambar diatas juga tampak ST menuliskan apa yang diketahui dari soal dan menggunakan data tersebut ke

dalam tabel pembuktiannya secara tepat. ST juga dapat mengartikan dengan benar bahasa matematika seperti garis bagi dan titik tengah serta simbol geometri yang ada pada soal saat sesi wawancara. Setiap pernyataan pembuktian yang dicantumkan ST sudah memiliki alasan pernyataan yang benar namun ST tidak dapat mengarahkan pernyataan tersebut menuju kesimpulan yang tepat sehingga pembuktiannya tidak terbukti.

Data Penelitian Subjek Kemampuan Sedang (SS)

1. Diketahui: $\overline{CE} \perp \overline{AB}$, $\overline{AE} \cong \overline{BE}$, $\angle ACD \cong \angle BCF$
 Ditanyakan: $\triangle DEC \cong \triangle FEC$.

No	Pengalaman	Alasan
1.	$\overline{CE} \perp \overline{AB}$, $\overline{AE} \cong \overline{BE}$, $\angle ACD \cong \angle BCF$	Diketahui
2.	$m\angle CAE = m\angle CEB = 90$	Def. sudut siku-siku
3.	$\angle CEA \cong \angle CEB$	Kongruensi sudut
4.	$m\angle DCE < 90$ $m\angle ECF < 90$	Sudut yang berkomplemen merupakan sudut lancip
5.	$m\angle DCE = m\angle ECF$	Sudut-sudut yang sam.
6.	$\angle DCE \cong \angle ECF$	Kongruensi sudut
7.	$\overline{CE} \cong \overline{CE}$	Refleksi sudut $\Rightarrow A$
8.	$\overline{CD} \cong \overline{CF}$	Alternat $\overline{AC} \cong \overline{BC}$
9.	$\triangle DEC \cong \triangle FEC$	Luaslah (SAS) atau SSS (transitiv)

Gambar 3. Jawaban Tes SPT 1 SS

Berdasarkan hasil tes pertama diatas tampak bahwa SS menyelesaikan pembuktian hingga akhir dengan hasil terbukti. SS menuliskan yang diketahui pada soal dengan benar. Pada saat wawancara, SS mampu menyebutkan konsep kekongruenan segitiga dengan benar namun kurang lengkap. SS mampu mengartikan simbol geometri seperti symbol tegak lurus, symbol garis dan lainnya pada soal. Pada gambar diatas SS menggunakan data yang diketahui untuk membuat pernyataan dengan alasannya. Pernyataan dan alasan yang dibuat oleh SS sudah benar namun SS tidak dapat mengarahkan pernyataan tersebut menuju kesimpulan pembuktian yang benar.

Basis tegak lurus
 Diketahui \overline{AE}
 \overline{ED} garis bagi $\angle AEC$
 \overline{AB} garis bagi $\angle AEC$

$m\angle DCE < 90$
 $m\angle ECF < 90$

$DCE = ECF$
 $DCE \cong ECF$
 $CE = CE$
 $DC = CF$

$m\angle AEC = \frac{1}{2}(m\angle AED + m\angle CED)$
 $m\angle AEC = \frac{1}{2} \cdot 180 = 90$
 $m\angle AEC = 90$

$\triangle DEC \cong \triangle FEC$

Gambar 4. Jawaban Tes SPT 2 SS

Berdasarkan hasil tes kedua diatas tampak bahwa jawaban SS cenderung acak dengan menuliskan yang diketahui pada soal dan beberapa konsep segitiga. SS juga tidak dapat menyelesaikan pembuktian sampai akhir. Pada saat wawancara, SS mampu menyebutkan konsep segitiga sama kaki dengan benar. SS juga mampu mengartikan titik tengah, garis bagi dan symbol geometri lainnya pada soal. Pada gambar diatas juga SS mencoba menggunakan data yang diketahui dari soal dalam pembuktiannya namun SS tidak dapat merangkainya ke dalam tabel pembuktian secara tepat. Karena SS tidak dapat merangkai pembuktiannya, maka SS juga kesulitan menuju penarikan kesimpulan pembuktian.

Data Penelitian Subjek Kemampuan Rendah (SR)

1. Diket: $CE \perp AB$
 $AC = BC$
 $\angle ACD = \angle BCE$

Ditanya: $\Delta BEC = \Delta AEC$

1. $CE \perp AB, AC = BC$	Diketahui
2. $\angle ACD = \angle BCE$	Refleksi garis
3. $CE \perp AB$	Diketahui
4. $\angle AEC$ dan $\angle BEC$	langkah 3
5. $\angle AEC = \angle BEC$	langkah 3 dan 4
6. $\angle ACD = \angle BCE$	Diket
7. $AC = BC, CE = CE$	Akhir langkah 6
8. $\Delta BEC = \Delta AEC$	langkah 2, 5, dan 7 (sudut, sisi, sudut)

Gambar 5. Jawaban Tes SPT 1 SR

Berdasarkan hasil tes pertama diatas tampak bahwa SR menuliskan yang diketahui dalam soal dan menyelesaikan pembuktian hingga akhir. Dari data wawancara, SR dapat menyebutkan teorema kekongruenan segitiga meski tidak lengkap namun SR tampak tidak begitu memahaminya. SR dapat menggunakan data dari soal tersebut ke dalam tabel pembuktiannya dan melengkapi alasan dari setiap pernyataan yang dibuat. Namun beberapa alasan yang digunakan SR kurang tepat dikarenakan SR kurang paham beberapa simbol geometri pada soal yang terungkap pada sesi wawancara. SR berusaha menarik kesimpulan dari pernyataan yang dibuat namun karena ada beberapa alasan yang kurang tepat sehingga kesimpulan yang dibuat SR kurang tepat.

Diket: E titik tengah AB
D titik tengah AC
 $DE \perp BC$

Ditanya: $\Delta ADE = \Delta CDE$

1. E titik tengah AB, D titik tengah AC	Diketahui
2. $\angle ADE = \angle CDE$	langkah 1 $AB \perp AC$
3. $\angle ADE = \angle CDE$	langkah 1 $DE \perp AC$
4. $AB = BA, AC = CA, DE = DE$	langkah 2 karena kongruen
5. $\Delta ADE = \Delta CDE$	

Gambar 6. Jawaban Tes SPT 2 SR

Berdasarkan hasil tes kedua diatas tampak bahwa SR menuliskan yang diketahui dalam soal dan beberapa pernyataan dan alasan, namun tidak menyelesaikan pembuktian sampai akhir. Dari data wawancara, SR tidak menguasai konsep segitiga sama kaki dengan baik. SR dapat menggunakan data dari soal tersebut ke dalam tabel pembuktiannya meskipun arah pembuktiannya belum terlihat karena SR tidak mengetahui Langkah selanjutnya. Terdapat beberapa simbol geometri pada soal yang tidak dipahami oleh SR yang terungkap pada sesi wawancara. SR sudah berusaha menuliskan pernyataan – pernyataan pembuktian namun SR tidak dapat menarik kesimpulan akhir karena langkah pembuktiannya tidak terselesaikan.

Diskusi

Dari hasil observasi pada saat tes, ST cenderung lebih tenang dan juga lebih terstruktur. ST sempat membaca materi sebelum tes dimulai. Untuk penulisan jawaban tes, ST sangat rapi dan lembar coretan yang disediakan hanya sedikit digunakan dengan catatan yang rapi pula. Selanjutnya, berdasarkan hasil penelitian pada ST menunjukkan bahwa hasil pengumpulan data subjek kemampuan tinggi pada tahap pertama dan tahap kedua memperoleh data yang sesuai. Kesesuaian yang dimaksud yaitu, pada indikator ketidakmampuan mahasiswa dalam menguasai konsep secara benar, ST mampu mengingat dan menguasai konsep kekongruenan dalam segitiga dan juga konsep segitiga yang lainnya. Pada indikator ketidakmampuan menggunakan data, ST juga dapat menggunakan data pada soal untuk pernyataan atau alasan dalam pembuktian. Pada indikator ketidakmampuan mengartikan bahasa matematika, ST masih dapat mengenali simbol-simbol geometri dalam soal dan juga definisi garis bagi dan titik tengah. Pada indikator ketidakcermatan dalam melakukan operasi hitung, ST tidak melakukan kesalahan karena dalam pembuktian geometri juga tidak muncul perhitungan. Pada indikator ketidakmampuan dalam menarik kesimpulan, ST tidak dapat menarik kesimpulan karena pada langkah akhir pembuktian ST tidak dapat mengarah pada pernyataan yang bisa membuat soal tersebut terbukti.

Untuk hasil observasi SS, subjek terlihat sedikit cemas. SS kurang rapi dalam menuliskan pembuktian dan lembar coretan yang disediakan banyak digunakan untuk tulisan – tulisan konsep yang akan digunakan. Pada saat wawancara, SS terlihat sangat berusaha mengingat konsep yang digunakan. Selanjutnya, berdasarkan hasil penelitian pada SS menunjukkan bahwa hasil pengumpulan data subjek kemampuan sedang pada tahap pertama dan tahap kedua memperoleh data yang sesuai. Kesesuaian yang dimaksud yaitu, pada indikator ketidakmampuan mahasiswa dalam menguasai konsep secara benar, SS mampu mengingat konsep kekongruenan dalam segitiga namun kurang paham beberapa konsep segitiga yang lainnya. Pada indikator ketidakmampuan menggunakan data, SS dapat menggunakan data pada soal untuk pernyataan atau alasan dalam pembuktian namun cenderung acak sehingga SS sendiri bingung dalam mengaitkan pernyataan satu dengan yang lainnya. Pada indikator ketidakmampuan mengartikan bahasa matematika, SS dapat mengenali simbol-simbol geometri dalam soal beserta definisi-definisi dari garis bagi dan titik tengah. Pada indikator ketidakcermatan dalam melakukan operasi hitung, SS juga tidak melakukan kesalahan karena dalam pembuktian geometri juga tidak muncul perhitungan. Pada indikator ketidakmampuan dalam menarik kesimpulan, SS tidak dapat menarik kesimpulan terbukti karena pada terhambat pada langkah mengaitkan pernyataan satu dengan yang lainnya.

Untuk hasil observasi SR pada saat tes, subjek jagan terlihat tenang namun tidak menyepelkan setiap informasi yang diberikan oleh peneliti. Untuk penulisan jawaban tes, SR cenderung lebih rapi dibandingkan oleh SS dan lembar coretan yang disediakan tidak digunakan. Meskipun subjek ini berkemampuan rendah, namun dalam sesi wawancara SR berusaha menjelaskan semaksimal mungkin yang telah dikerjakan. Pada saat pengerjaan soalpun SR menggunakan waktu sebaik mungkin, tidak hanya diam meski tidak bisa.

Selanjutnya, berdasarkan hasil penelitian pada SR menunjukkan bahwa hasil pengumpulan data subjek kemampuan rendah pada tahap pertama dan tahap kedua memperoleh data yang sesuai. Kesesuaian yang dimaksud yaitu, pada indikator ketidakmampuan mahasiswa dalam menguasai konsep secara benar, ST salah dalam menjelaskan konsep konsep kekongruenan dalam segitiga dan juga konsep segitiga yang lainnya. Pada indikator ketidakmampuan menggunakan data, SR dapat menggunakan data pada soal untuk pernyataan atau alasan dalam pembuktian meski belum mengarah pada tahap terbukti. Pada indikator ketidakmampuan mengartikan bahasa matematika, ST salah mengenali beberapa simbol-simbol geometri dalam soal. Pada indikator ketidakcermatan dalam melakukan operasi hitung, SR tidak melakukan kesalahan karena dalam pembuktian geometri juga tidak muncul perhitungan. Pada indikator ketidakmampuan dalam menarik kesimpulan, SR tidak dapat menarik kesimpulan karena pernyataan pernyataan yang dituliskan tidak dilanjutkan hingga terbukti soal tersebut.

Hasil penelitian ini sejalan dengan penelitian sebelumnya yang menunjukkan bahwa mahasiswa dengan pemahaman konsep yang lebih baik cenderung memiliki strategi penyelesaian yang lebih terstruktur dan sistematis dalam pembuktian geometri (Fredriksdotter et al., 2022; Jones, 2019). Selain itu, siswa dengan keterampilan reflektif lebih cenderung menghasilkan pembuktian yang valid dibandingkan dengan siswa yang hanya mengandalkan hafalan konsep (García et al., 2011). Representasi matematis mendukung temuan bahwa ketidakmampuan dalam mengartikan simbol geometri dapat menjadi hambatan signifikan dalam pembuktian (Wilkie, 2019). Kesulitan SS dan SR dalam menghubungkan pernyataan dengan logika yang tepat juga konsisten dengan temuan sebelumnya (Weber et al., 2020) yang menyoroti bahwa mahasiswa sering mengalami kesulitan dalam memahami struktur logis dalam pembuktian matematis.

Simpulan

Berdasarkan hasil penelitian dan analisis yang telah dilakukan, diperoleh kesimpulan sebagai berikut: Kesulitan subjek berkemampuan tinggi adalah ketidakmampuan dalam menarik kesimpulan pembuktian teorema, Kesulitan subjek berkemampuan sedang adalah ketidakmampuan mengingat beberapa konsep, dan kurang cermat dalam menggunakan data untuk mengaitkan pernyataan pernyataan dalam pembuktian, Kesulitan subjek berkemampuan rendah adalah ketidakmampuan mengingat konsep pembuktian, ketidakmampuan mengenali simbol-simbol geometri matematika, dan ketidakmampuan dalam menarik kesimpulan

Ucapan Terima Kasih

Terima kasih banyak kepada tim penelitian yang telah bekerja sama dengan baik selama penelitian (R.N. dan M.D.J.). Kemudian terima kasih pula untuk LPPM Universitas Qomaruddin yang mendanai penelitian ini dan semua pihak yang membantu dalam penelitian ini yang tidak dapat disebutkan satu persatu

Konflik Kepentingan

Penulis menyatakan tidak ada konflik kepentingan

Kontribusi Penulis

I.V.N. menemukan masalah penelitian dan mengembangkan gagasan penelitian yang disajikan. R.N. berpartisipasi aktif membantu I.V.N. dalam pengembangan teori, metodologi,

pengorganisasian dan analisis data, pembahasan hasil dan persetujuan versi akhir karya. M.D.J. berperan dalam pengumpulan data, mereduksi data dan pembuatan laporan. Seluruh penulis menyatakan bahwa versi final makalah ini telah dibaca dan disetujui. Total persentase kontribusi untuk konseptualisasi, penyusunan, dan koreksi makalah ini adalah sebagai berikut: I.V.N.: 50%, R.N.: 30%, dan M.D.J.: 20%

Pernyataan Ketersediaan Data

Penulis menyatakan data yang mendukung hasil penelitian ini akan disediakan oleh penulis koresponden, [I.V.N], atas permintaan yang wajar.

Referensi

- Appova, A., & Taylor, C. E. (2019). Expert mathematics teacher educators' purposes and practices for providing prospective teachers with opportunities to develop pedagogical content knowledge in content courses. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 22(2), 179–204. <https://doi.org/10.1007/s10857-017-9385-z>
- Bieda, K. N. (2010). Enacting Proof-Related Tasks in Middle School Mathematics: Challenges and Opportunities Enacting Proof-Related Tasks in Challenges and Opportunities. *Source: Journal for Research in Mathematics Education Journal for Research in Mathematics Education*, 41(4), 351–382. <https://doi.org/10.2307/41103880>
- Cervello Rogers, K., & Steele, M. D. (2016). Graduate teaching assistants' enactment of reasoning-and-proving tasks in a content course for elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 47(4), 372–419. <https://doi.org/10.5951/jresematheduc.47.4.0372>
- Clements, D. H., Sarama, J., Spitler, M. E., Lange, A. A., & Wolfe, C. B. (2011). Mathematics learned by young children in an intervention based on learning trajectories: A large-scale cluster randomized trial. *Journal for Research in Mathematics Education*, 42(2), 127–166. <https://doi.org/10.5951/jresematheduc.42.2.0127>
- Ellis, A. B., Ozgur, Z., Vinsonhaler, R., Dogan, M. F., Carolan, T., Lockwood, E., Lynch, A., Sabouri, P., Knuth, E., & Zaslavsky, O. (2017). Student thinking with examples: The criteria-affordances-purposes-strategies framework. *Journal of Mathematical Behavior*, January. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.06.003>
- Fiallo, J., & Gutiérrez, A. (2017). Analysis of the cognitive unity or rupture between conjecture and proof when learning to prove on a grade 10 trigonometry course. *Educational Studies in Mathematics*, 96(2), 145–167. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9755-6>
- Fredriksdotter, H., Norén, N., & Bråting, K. (2022). Investigating grade-6 students' justifications during mathematical problem solving in small group interaction. *Journal of Mathematical Behavior*, 67(January). <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.100972>
- García-García, J., & Dolores-Flores, C. (2018). Intra-mathematical connections made by high school students in performing Calculus tasks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49(2), 227–252. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1355994>
- García, M., Llinares, S., & Sánchez-Matamoros, G. (2011). Characterizing thematized derivative schema by the underlying emergent structures. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 9(5), 1023–1045. <https://doi.org/10.1007/s10763-010-9227-2>
- Jones, S. R. (2019). Students' Application of Concavity and Inflection Points to Real-World Contexts. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 17(3), 523–544. <https://doi.org/10.1007/s10763-017-9876-5>

- Kholid, M. N., Swastika, A., Ishartono, N., Nurcahyo, A., Lam, T. T., Maharani, S., Ikram, M., Murniasih, T. R., Majid, Wijaya, A. P., & Pratiwi, E. (2022). Hierarchy of Students' Reflective Thinking Levels in Mathematical Problem Solving. *Acta Scientiae*, 24(6), 24–59. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6883>
- Komatsu, K., & Jones, K. (2022). Generating mathematical knowledge in the classroom through proof, refutation, and abductive reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 109(3), 567–591. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10086-5>
- Kontorovich, I. (2021). Minding mathematicians' discourses in investigations of their feedback on students' proofs: a case study. *Educational Studies in Mathematics*, 107(2), 213–234. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10035-2>
- Nachlieli, T., Herbst, P., & González, G. (2009). Seeing a Colleague Encourage a Student to Make an Assumption While Proving: What Teachers Put in Play When Casting an Episode of Instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(4), 427–459. <http://www.jstor.org/stable/40539346>
- Nolte, M., & Pamperien, K. (2017). Challenging problems in a regular classroom setting and in a special foster programme. *ZDM - Mathematics Education*, 49(1), 121–136. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0825-5>
- Nursyahidah, F., Saputro, B. A., & Albab, I. U. (2021). Desain Pembelajaran Kerucut Berkonteks Tradisi Megono Gunung. *Jurnal Elemen*, 7(1), 19–28. <https://doi.org/10.29408/jel.v7i1.2655>
- Sholekah, L. M., Anggreini, D., & Waluyo, A. (2017). Analisis Kesulitan Siswa Dalam Menyelesaikan Soal Matematika Ditinjau Dari Koneksi Matematis Materi Limit Fungsi. *WACANA AKADEMIKA: Majalah Ilmiah Kependidikan*, 1(2), 151–164. <https://doi.org/10.30738/wa.v1i2.1413>
- Sindy Mustika Sari, Aldi Firmansyah, & Reza Lestari. (2022). Analisis Kesulitan Siswa Dalam Menyelesaikan Soal Matematika Problem Solving Berdasarkan Tahapan Heuristik Polya Siswa Kelas XI Ipa. *Seminar Nasional Pendidikan Guru Sekolah Dasar Universitas Kuningan*, 2(1), 109–114. <https://doi.org/10.25134/prosidingsemnaspgsd.v2i1.32>
- Weber, K., Mejía-Ramos, J. P., Fukawa-Connelly, T., & Wasserman, N. (2020). Connecting the learning of advanced mathematics with the teaching of secondary mathematics: Inverse functions, domain restrictions, and the arcsine function. *Journal of Mathematical Behavior*, 57(January 2019), 100752. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.100752>
- Wilkie, K. J. (2019). Investigating secondary students' generalization, graphing, and construction of figural patterns for making sense of quadratic functions. *Journal of Mathematical Behavior*, 54(August 2018), 0–1. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.01.005>
- Yang, K. L. (2012). Structures of cognitive and metacognitive reading strategy use for reading comprehension of geometry proof. *Educational Studies in Mathematics*, 80(3), 307–326. <https://doi.org/10.1007/s10649-011-9350-1>

Biografi Penulis

	<p>Ika Victoria Nalurita, is a lecturer and researcher at the department of mathematics education, faculty of teacher training and education, Universitas Qomaruddin Gresik, East Java, Indonesia. Her research interest is HOTS, Geometric Problems, and Thinking Processes. Phone: +6281332182626 Email: ika.victoria@uqgresik.ac.id</p>
	<p>Roisatun Nisa', is a lecturer and researcher at the department of mathematics education, faculty of teacher training and education, Universitas Qomaruddin Gresik, East Java, Indonesia. Her research interest is Lesson Plan, Learning Media, and Ethnomathematics. Phone: +6285648169991 Email: roisatunnisa@uqgresik.ac.id</p>
	<p>Melinda Dwi Wijayanti, is a researcher at the Department of Mathematics Education, Faculty of Teacher Training and Education, Qomaruddin Gresik University, East Java, Indonesia. Phone: +6285843379014 Email: melindadw Wijayanti4@gmail.com</p>